



Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)

Кафедра математики и анализа данных
Факультет информационных технологий и анализа больших данных

Документ подписан усиленной неквалифицированной электронной подписью.

Организация: «ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Сертификат: NX0Hq3ON/Iu4JeivM1o1rQEXtwb5zkKK

Утверждено: Проректор по учебной и методической работе, Е.А. Каменева

Дата: 23.10.2025 г.

Теория вероятностей, математическая статистика и анализ данных

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки

02.03.01 - Математика и компьютерные науки,

Образовательная программа «Цифровая аналитика и математическая оценка рисков»

Рекомендовано

Факультет информационных технологий и анализа больших данных

(протокол № 39 от 20.12.2023 г.)

Одобрено

Кафедра математики и анализа данных

(протокол № 08 от 04.12.2023 г.)



Содержание

1. Наименование дисциплины	3
2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине	3
3. Место дисциплины в структуре образовательной программы	4
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся	4
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий	5
5.1. Содержание дисциплины	5
5.2. Учебно – тематический план	10
5.3. Содержание семинаров, практических занятий	11
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	15
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы	15
6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	17
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине	18
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	4
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	9
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	28
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)	31
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	31



1. Наименование дисциплины

Теория вероятностей, математическая статистика и анализ данных

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	1. Владеет фундаментальными знаниями в области математики.	Знать: основные понятия теории вероятностей и математической статистики; методики расчетов, используемые при анализе данных; вероятностные и статистические методы. Уметь: обосновывать выбор вероятностной или статистической модели при анализе случайного явления.
		2. Применяет теоретические знания для выбора оптимальных методов решения поставленных профессиональных задач.	Знать: свойства вероятностных моделей и объектов, их ограничения и диапазон применения; статистические методы анализа данных Уметь: выбирать или строить вероятностную модель в соответствии с задачей.
		3. Применяет математические методы для решения прикладных математических и технических задач.	Знать: определения и формулы расчетов вероятностных характеристик. Уметь: использовать вероятностные и статистические методы, а также методы имитационного моделирования с использованием языка Python, для решения прикладных и технических задач.



3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей, математическая статистика и анализ данных» относится к «Циклу математики и информатики».

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Очная форма обучения

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 3 (в часах)	Семестр 4 (в часах)
Общая трудоемкость дисциплины	8/288	144	144
<i>Контактная работа – Аудиторные занятия</i>	<i>136</i>	<i>68</i>	<i>68</i>
<i>Лекции</i>	<i>68</i>	<i>34</i>	<i>34</i>
<i>Семинары, практические занятия</i>	<i>68</i>	<i>34</i>	<i>34</i>
<i>Самостоятельная работа</i>	<i>152</i>	<i>76</i>	<i>76</i>
Вид текущего контроля	Контрольная работа ; Контрольная работа	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Экзамен ; Экзамен	Экзамен	Экзамен



5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

Тема 1. Элементарная теория вероятностей

1. Основы комбинаторики

Введение в теорию вероятностей. Биномиальные коэффициенты и их свойства. Основные конфигурации комбинаторики: сочетания, размещения, перестановки.

2. Элементарные определения вероятностей

Интуитивные понятия случайного события и вероятности. Классический способ подсчета вероятностей. Геометрические вероятности.

3. Конечное вероятностное пространство

Конечное пространство элементарных событий. Случайное событие как подмножество в конечном пространстве элементарных событий. Класс всех подмножеств конечного пространства элементарных событий. Аксиомы вероятности и вероятностное пространство (модель). Свойства вероятности (монотонность, формула включений-исключений, конечная полуаддитивность). Классическая модель на примере задачи об отсутствии неподвижных точек случайной перестановки.

4. Условные вероятности и независимость событий

Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формулы Байеса. Независимые события. Попарная независимость и независимость в совокупности.

5. Схема Бернулли

Схема повторных независимых испытаний (схема Бернулли). Построение модели для схемы Бернулли. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли. Закон больших чисел Бернулли. Локальная и интегральная предельные теоремы для схемы Бернулли. Теорема Пуассона.

Тема 2. Случайные величины и векторы

1. Случайные величины и функции распределения.

Алгебры и сигма-алгебры. Измеримое пространство. Конечные и счетно-аддитивные меры на алгебрах. Общее определение вероятностного пространства. Дополнительные свойства (критерии) счетно-аддитивных мер: счетная полуаддитивность и непрерывность в нуле.



Борелевская сигма-алгебра на вещественной прямой. Случайная величина как измеримая функция на пространстве элементарных событий. Распределение случайной величины как мера на прямой. Функция распределения случайной величины. Свойства функции распределения. Математическое ожидание случайной величины как интеграл Лебега.

2. Дискретные случайные величины

Дискретная случайная величина (ДСВ) и ее закон распределения. Функция от ДСВ. Некоторые дискретные распределения (Бернулли, биномиальное, равномерное, геометрическое, пуассоновское) и задачи, приводящие к ним. Пример неступенчатой дискретной функции распределения.

Математическое ожидание дискретной случайной величины и функции от нее, моменты, дисперсия.

Дискретные случайные векторы. Независимость дискретных случайных величин. Функция распределения случайного вектора и ее свойства. Распределение дискретного случайного вектора и его компонент. Числовые характеристики случайного вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Ковариация и коэффициент корреляции. Функции от одной или нескольких случайных величин. Арифметические операции над случайными величинами.

3. Абсолютно-непрерывные случайные величины

Мера Лебега на вещественной прямой. Абсолютно непрерывные случайные величины (АНСВ). Свойства функции распределения и плотности. Некоторые АН распределения (равномерное на отрезке, показательное, гамма-распределение, нормальное, логнормальное, Коши) и задачи, приводящие к ним.

Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины. Математическое ожидание функции от абсолютно непрерывной случайной величины. Распределение функций от случайных величин и векторов с абсолютно-непрерывным распределением. Сумма независимых величин.

Многомерное нормальное распределение. Нормальность суммы независимых нормальных случайных величин. Контрпримеры.

Тема 3. Предельные теоремы

1. Виды сходимости случайных последовательностей

Неравенства Маркова и Чебышёва. Сходимость случайных последовательностей по вероятности, почти наверное, в среднем и среднем квадратичном, по распределению.

2. Характеристические и производящие функции

Комплекснозначные случайные величины. Характеристические функции и их свойства. Метод характеристических функций в доказательстве предельных теорем.



Производящие функции.

3. Законы больших чисел и центральная предельная теорема

Законы больших чисел Чебышева и Хинчина. Усиленные ЗБЧ Колмогорова. Центральная предельная теорема. Теорема Пуассона.

Тема 4. Оценки параметров

1. Выборочный метод

Основные задачи математической статистики. Выборка, эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения, выборочные характеристики, вариационный ряд. Гистограмма. Сходимость выборочных характеристик к теоретическим. Моделирование выборок и сравнение выборочных характеристик с теоретическими.

Использование Python библиотек `numpy`, `scipy.stats`, `matplotlib`, `statsmodels` для моделирования выборок, вычисления выборочных и теоретических характеристик и построения эмпирической функции распределения и гистограммы.

2. Точечные оценки параметров распределения

Понятие статистики, точечной оценки. Свойства точечных оценок: несмещенность, асимптотическая несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность и асимптотическая нормальность. Несмещенная оценка дисперсии. Достаточное условие состоятельности. Состоятельность асимптотически нормальной оценки.

Методы построения точечных оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Оптимальные оценки.

Информационное количество Фишера. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки.

3. Интервальные оценки параметров нормального распределения

Понятие доверительного интервала, точный доверительный интервал. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера. Лемма и теорема Фишера. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Доверительный интервал для вероятности. Выборочный коэффициент корреляции.

Тема 5. Проверка статистических гипотез

1. Статистические гипотезы. Проверка параметрических гипотез

Понятие статистической гипотезы. Виды гипотез, статистический критерий, статистика критерия, критическая область. Общая схема проверки гипотезы. Ошибки I и II рода, уровень значимости, мощность. Критерий отношения правдоподобия. Лемма Неймана-Пирсона.



Случай двух простых гипотез о математическом ожидании нормальной выборки. Состоятельность критерия. Замечание об объеме выборки. Одновыборочные критерии для математического ожидания и дисперсии нормальных выборок и значении вероятности для выборки из распределения Бернулли. Двухвыборочные критерии для параметров нормальных выборок (сравнение средних при повторных измерениях, равенство дисперсий, сравнение средних при известных, неизвестных равных и неизвестных неравных дисперсиях, сравнение вероятностей успеха в двух сериях испытаний Бернулли). Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции Пирсона.

Использование Python библиотеки `scipy.stats` для проверки гипотез.

2. Критерии согласия

Критерий согласия хи-квадрат. Случай простой гипотезы для дискретного распределения с конечным или счетным числом атомов. Теорема Пирсона. Состоятельность критерия хи-квадрат. Случай простой гипотезы для непрерывного распределения. Случай сложной гипотезы для нормального распределения, геометрического и распределения Пуассона.

Использование Python библиотеки `scipy.stats` для проверки гипотез согласия.

Тема 6. Статистический анализ зависимостей

1. Условные распределения

Условные распределения и условные математические ожидания для дискретных распределений. Формула полного математического ожидания. Условная дисперсия и формула полной дисперсии.

Условные распределения и условные математические ожидания в случае совместного абсолютно-непрерывного распределения.

2. Дисперсионный анализ Фишера (ANOVA)

Модель однофакторного дисперсионного анализа. Факторы. Полная, факторная и остаточная дисперсия. Процедура проведения дисперсионного анализа, требования к проведению, анализ парных сравнений.

Использование Python библиотек `scipy.stats` и `statsmodels` для проведения дисперсионного анализа.

3. Непараметрические критерии независимости

Разделение изученных методов на параметрические и непараметрические. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена, критерий значимости. Точный тест Фишера, история метода. Критерий независимости хи-квадрат как специальный случай критерия согласия для сложной гипотезы.

4. Построение оптимальных оценок



Байесовский подход к оценке параметров. Полные и достаточные статистики.
Факторизационная теорема Неймана-Фишера.



5.2. Учебно – тематический план

Очная форма обучения

п/ п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоемкость в часах				
		Всего	Контактная работа - Аудиторная работа			Самостоятельная работа
			Общая, в т.ч.:	Лекции	Семинары, практические занятия	
1	Элементарная теория вероятностей	45	21	9	12	24
2	Случайные величины и векторы	69	33	17	16	36
3	Предельные теоремы	30	14	8	6	16
4	Оценки параметров	59	28	12	16	31
5	Проверка статистических гипотез	47	22	12	10	25
6	Статистический анализ зависимостей	38	18	10	8	20
В целом по дисциплине		288	136	68	68	152



5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях	Формы проведения занятий
Элементарная теория вероятностей	Основные понятия комбинаторики: правила сложения и умножения, сочетания, размещения, перестановки. Использование комбинаторных формул при классическом подсчете вероятностей. Геометрические вероятности. Пространство элементарных событий. Случайное событие как подмножество в пространстве элементарных событий. Алгебра событий. Аксиомы вероятности и вероятностное пространство. Свойства вероятности. Формула включений-исключений. Индикаторы событий. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формулы Байеса. Независимые события. Схема Бернулли.	-работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия; -изучение рекомендованных к занятию литературных источников; -подготовка к семинарским и практическим занятиям; - выполнение домашних заданий
Случайные величины и векторы	Дискретные случайные величины. Вычисление дискретных распределений. Основные дискретные распределения. Задачи на вычисление вероятностей. Графики дискретных функций распределения. Числовые характеристики ДСВ. Вычисление математических ожиданий и дисперсий ДСВ, двумерные ДС векторы, вычисление маргинальных распределений, независимость, ковариация и коэффициент, корреляции. Моменты основных дискретных распределений	-работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия; -изучение рекомендованных к занятию литературных источников; -подготовка к семинарским и практическим занятиям; -выполнение домашних заданий



Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях	Формы проведения занятий
	(Бернулли, биномиальное, геометрическое, пуассоновское). Абсолютно непрерывные случайные величины. Задачи на вычисление константы плотности, вероятностей событий, функций распределения по плотности и наоборот. Вычисление моментов основных абсолютно-непрерывных распределений (равномерное, нормальное, показательное). Вычисление распределений функций от абсолютно-непрерывных случайных величин и векторов. Функции от независимых случайных величин. Максимумы и минимумы независимых случайных величин. Свойства моментов, ковариации, коэффициента корреляции.	
Предельные теоремы	Оценка вероятностей с помощью неравенств Маркова и Чебышёва. Проверка сходимости последовательностей случайных величин. Вычисление характеристических и производящих функций.	-работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия; -изучение рекомендованных к занятию литературных источников; -подготовка к семинарским и практическим занятиям; -выполнение домашних заданий
Оценки параметров	Моделирование выборок и сравнение выборочных характеристик с теоретическими. Использование электронных таблиц и библиотек numpy, scipy.stats, matplotlib, statsmodels для моделирования выборок, вычисления выборочных и теоретических	-работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия; -изучение рекомендованных к занятию литературных источников; -подготовка к семинарским и практическим занятиям;



Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях	Формы проведения занятий
	характеристик, построения эмпирической функции распределения и гистограммы. Методы построения точечных оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Информационное количество Фишера. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки. Построение одно- и двухсторонних доверительных интервалов для параметров нормального распределения и распределения Бернулли. Выборочный коэффициент корреляции. Значимость коэффициента корреляции	-выполнение домашних заданий
Проверка статистических гипотез	Одновыборочные критерии для математического ожидания и дисперсии нормальных выборок и значения вероятности для выборки из распределения Бернулли. Двухвыборочные критерии для параметров нормальных выборок (сравнение средних при повторных измерениях, равенство дисперсий, сравнение средних при известных, неизвестных равных и неизвестных неравных дисперсиях, сравнение вероятностей успеха в двух сериях испытаний Бернулли). Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции Пирсона. Использование электронных таблиц и библиотеки <code>scipy.stats</code> для проверки гипотез. Критерий согласия хи-квадрат. Случай простой гипотезы для дискретного распределения с конечным или счетным числом атомов. Случай простой гипотезы для	-работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия; -изучение рекомендованных к занятию литературных источников; -подготовка к семинарским и практическим занятиям; -выполнение домашних заданий



Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях	Формы проведения занятий
	непрерывного распределения. Случай сложный гипотезы для нормального распределения, геометрического и распределения Пуассона. Распознавание распределения по выборке. Использование электронных таблиц и библиотеки <code>scipy.stats</code> для проверки гипотез согласия.	
Статистический анализ зависимостей	Проверка формул полного математического ожидания и дисперсии на примере эмпирического распределения реальной выборки. Модель однофакторного дисперсионного анализа. Процедура проведения дисперсионного анализа, требования к проведению, анализ парных сравнений. Исследование парных выборок на независимость непараметрическими методами. Построение оптимальных оценок и доказательство оптимальности.	-работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия; -изучение рекомендованных к занятию литературных источников; -подготовка к семинарским и практическим занятиям; -выполнение домашних заданий



6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Элементарная теория вероятностей	Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формулы Байеса. Независимые события. Схема Бернулли.	Работа с текстом лекции, разбор вопросов и заданий по теме занятия; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Случайные величины и векторы	Проверка счетной аддитивности с использованием критериев Совместные абсолютно-непрерывные распределения, многомерное гауссовское распределение, гауссовость линейной комбинации компонент гауссовского вектора.	Работа с текстом лекции, разбор вопросов и заданий по теме занятия; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Предельные теоремы	Задачи на предельные теоремы	Работа с текстом лекции, разбор вопросов и заданий по теме занятия; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Оценки параметров	Подготовка данных для анализа с использованием библиотек numpy, pandas. Построение ящика с усами с использованием электронных таблиц и библиотек scipy.stats и seaborn	Работа с текстом лекции, разбор вопросов и заданий по теме занятия; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Проверка статистических гипотез	Задачи на вычисление ошибки I и II рода, уровня значимости, мощности. Построение наиболее мощного	Работа с текстом лекции, разбор вопросов и заданий по теме занятия;



Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
	критерия.	изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Статистический анализ зависимостей	Задачи на условные распределения и условные математические ожидания в случае совместного абсолютно-непрерывного распределения Доказательство факторизационной теоремы	Работа с текстом лекции, разбор вопросов и заданий по теме занятия; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.



6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерный вариант контрольной работы (3-й семестр)

1. В партии из 14 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 6 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 4 стандартных.
2. В круг радиуса 120 наудачу бросаются 2 точки. Найдите вероятность того, что расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не меньше 40.
3. Вероятность попадания при одном выстреле в мишень 0, 81. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при 3 выстрелах.
4. Детали, изготовленные в цехе, попадают к одному из 2-х контролёров. Вероятность того, что деталь попадёт к 1-му контролёру, равна 0, 3; ко 2-му – 0, 7. Вероятность того, что деталь будет признана стандартной 1-м контролёром равна 0, 95; 2-м контролёром – 0, 98. Изготовленная деталь при проверке была признана стандартной. Найдите вероятность того, что эту деталь проверял 1-й контролёр.
5. Отрезок длины 5 поделен на две части длины 2 и 3 соответственно, 9 точек последовательно бросают случайным образом на этот отрезок. Найдите вероятность того, что количество точек, попавших на отрезок длины 2, не будет равно 4.

Примерный вариант контрольной работы (4-й семестр)

1. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – выборка из распределения Пуассона с параметром λ . Вычислить среднее значение и дисперсию статистики $\bar{X}$.
2. Используя метод моментов с подходящей пробной функцией $g(y)$, оценить параметр $\alpha > 0$ распределения Лапласа.
3. Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $2y/\theta^2$ при $y \in [0, \theta]$.
4. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. Проверить состоятельность и несмещённость оценки θ^* параметра θ , если $\theta^* = \bar{X} + X_{(n)}/2$.
5. Для заданной выборки (см. файл sample.py) из нормального распределения найти точный доверительный интервал уровня доверия 0.95 для математического ожидания.



7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа	1. Владеет фундаментальными знаниями в области математики.	Знать: основные понятия теории вероятностей и математической статистики; методики расчетов, используемые при анализе данных; вероятностные и статистические методы. Уметь: обосновывать выбор вероятностной или статистической	Опишите линейную модель дисперсионного анализа. Какого рода гипотезы формулируются и проверяются в этой модели?



Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных мето-		модели при анализе случайного явления.	
	2. Применяет теоретические знания для выбора оптимальных методов решения поставленных профессиональных задач.	Знать: свойства вероятностных моделей и объектов, их ограничения и диапазон применения; статистические методы анализа данных Уметь: выбирать или строить вероятностную модель в соответствии с задачей.	Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. Найти оценку параметра θ , наилучшую в среднеквадратичном смысле в классе оценок вида $c_n X_{(n)}$. Найти её смещение.
	3. Применяет математические методы для решения прикладных математических и технических задач.	Знать: определения и формулы расчетов вероятностных характеристик. Уметь: использовать вероятностные и статистические методы, а также методы ими-	По выборочным данным реализовать проверку гипотезы независимости двух выборок по критерию хи-квадрат с использованием инструментария Python. Провести аналогичную проверку по смоделированным данным.



Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
дов, теоретической механики в профессиональной деятельности		тационного моделирования с использованием языка Python, для решения прикладных и технических задач.	



Примеры практико-ориентированных заданий

Примеры вопросов для подготовки к промежуточной аттестации

Примерные вопросы для подготовки к экзамену (3-й семестр)

1. Основные понятия комбинаторики
2. Свойства биномиальных коэффициентов.
3. Классический способ подсчета вероятностей.
4. Геометрические вероятности.
5. Конечное вероятностное пространство.
6. Условные вероятности. Формула умножения. Формула полной вероятности
7. формулы Байеса.
8. Независимые события. Попарная независимость и независимость в совокупности.
9. Схема повторных независимых испытаний (схема Бернулли). Формула Бернулли.
10. Закон больших чисел Бернулли. Теорема Пуассона.
11. Локальная и интегральная предельная теоремы для схемы Бернулли.
12. Алгебры и сигма-алгебры событий, измеримое пространство.
13. Конечно- и счетно-аддитивные меры на алгебре.
14. Вероятностное пространство (общий случай).
15. Борелевская сигма-алгебра на прямой.
15. Случайные величины.
16. Функция распределения случайной величины. Свойства функции распределения.
17. Дискретная случайная величина (ДСВ) и ее закон распределения.
18. Функция от дискретной случайной величины и арифметические операции над дискретными случайными величинами.
19. Основные числовые характеристики дискретных случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение и их свойства.
20. Примеры известных дискретных распределений, их числовые характеристики.
21. Основные числовые характеристики дискретных случайных векторов: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, ковариация и коэффициент корреляции. Свойства ковариации и коэффициента корреляции.
22. Неравенство Коши-Буняковского.
23. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины. Свойства функции плотности.



24. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины.

25. Математическое ожидание функции от абсолютно непрерывной случайной величины.

26. Равномерное распределение случайной величины на отрезке.

27. Показательное (экспоненциальное) распределение случайной величины.

28. Нормальный закон распределения случайной величины.

29. Гамма-распределение.

30. Распределение Коши

31. Распределение функций от случайных величин с абсолютно-непрерывным распределением.

32. Многомерное нормальное распределение.

33. Нормальность суммы независимых нормальных случайных величин.

34. Дополнительные характеристики случайных величин: асимметрия, эксцесс, квантили, медиана, мода.

35. Неравенства Маркова и Чебышёва.

36. Сходимость случайной последовательности по вероятности.

37. Множество сходимости.

38. Сходимость случайной последовательности почти наверное. Связь со сходимостью по вероятности.

39. Сходимость случайной последовательности в среднем и среднем квадратичном. Связь со сходимостью по вероятности.

40. Сходимость случайной последовательности слабо по распределению. Связь со сходимостью по вероятности.

41. Характеристические функции. Теорема единственности

42. Теорема непрерывности для характеристических функций.

44. Производящие функции.

43. Закон больших чисел. Теорема Чебышева.

47. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых.

48. Теорема Пуассона в терминах треугольной схемы серий.

Примерные вопросы для подготовки к экзамену (4-й семестр)

1. Основные задачи математической статистики.

2. Понятие выборки.

3. Эмпирическая функция распределения гистограмма.

4. Выборочные характеристики как числовые характеристики эмпирического распределения.

6. Понятие статистик, порядковые статистики, вариационный ряд.

7. Точечные оценки параметров распределений



7. Свойства точечных оценок: состоятельность, сильная состоятельность, несмещённость, асимптотическая нормальность.

8. Методы построения точечных оценок. Метод моментов.

9. Метод максимального правдоподобия.

10. Среднеквадратический и асимптотический подходы к сравнению оценок.

Оптимальные оценки.

11. Регулярные семейства распределений. Информационное количество Фишера.

12. Неравенство Рао-Крамера.

13. Эффективные оценки.

14. Доверительный интервал.

15. Распределение хи-квадрат.

16. Распределение Стьюдента (t-распределение).

17. Распределение Фишера.

18. Лемма и теорема Фишера.

19. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известном значении дисперсии.

20. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения при известном математическом ожидании.

21. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения при неизвестном математическом ожидании.

22. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при неизвестном значении дисперсии.

23. Доверительный интервал для вероятности успеха в схеме Бернулли.

24. Понятие статистической гипотезы.

25. Виды гипотез, статистический критерий, статистика критерия, критическая область.

26. Общая схема проверки гипотезы. Ошибки I и II рода, уровень значимости, мощность.

27. Критерий отношения правдоподобия. Лемма Неймана-Пирсона.

28. Выборочный коэффициент корреляции. Значимость коэффициента корреляции.

29. Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания нормального распределения (с известным и неизвестным значением дисперсии).

30. Проверка гипотезы о числовом значении вероятности успеха в схеме Бернулли.

31. Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии нормального распределения (при известном и неизвестном значении математического ожидания).



32. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий нормальных выборок при повторных измерениях.

33. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух независимых нормальных выборок.

34. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух независимых нормальных выборок при известных дисперсиях.

35. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух независимых нормальных выборок при неизвестных равных дисперсиях.

36. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух независимых нормальных выборок при неизвестных неравных (вообще говоря) дисперсиях.

37. Проверка гипотезы о равенстве вероятностей успеха двух независимых схем Бернулли.

38. Критерий согласия хи-квадрат. Теорема Пирсона.

39. Критерий хи-квадрат для дискретного распределения, случай проверки простой гипотезы.

40. Критерий хи-квадрат для абсолютно-непрерывного распределения, случай проверки простой гипотезы.

41. Состоятельность критерия хи-квадрат.

42. Критерий хи-квадрат в случае сложной гипотезы для нормального распределения

43. Критерий хи-квадрат в случае сложной гипотезы для геометрического и распределения Пуассона

44. Условные распределения и условные математические ожидания для дискретных распределений. Формула полного математического ожидания.

45. Условная дисперсия и формула полной дисперсии.

46. Условные распределения и условные математические ожидания в случае совместного абсолютно-непрерывного распределения.

47. Модель однофакторного дисперсионного анализа.

48. Процедура проведения дисперсионного анализа, требования к проведению, анализ парных сравнений.

49. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена, критерий значимости.

50. Точный тест Фишера.

51. Критерий независимости хи-квадрат.

52. Байесовский подход к оценке параметров.

53. Полные и достаточные статистики.

54. Факторизационная теорема Неймана-Фишера.

Пример экзаменационного билета



Задание 1. (20 баллов)

Информационное количество Фишера. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки.

Задание 2. (20 баллов)

Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$ равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$

Задание 3. (20 баллов)

Используя Python, для заданной выборки из нормального распределения найти точный доверительный интервал уровня доверия 0.99 для дисперсии.

1,91006076	2,32854263	2,69751125	2,06148415
1,62691529	1,9381169	1,93666006	2,37682343
2,23566126	2,52567825	1,90877245	2,80382222
2,0202772	2,39799578	2,77971453	1,90806477
1,70598567	2,55765817	2,26506838	1,88688805



8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика в вопросах и задачах: учебник / Е. С. Вентцель. — Москва : Юстиция, 2018. — 658 с. - ЭБС BOOK.ru. — URL: <https://www.book.ru/book/924283> (дата обращения: 28.11.2023). - Текст : электронный.

2. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учебное пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — Москва : Юстиция, 2018. — 480 с. – ЭБС BOOK.ru. — URL: <https://www.book.ru/book/927024> (дата обращения: 28.11.2023). – Текст : электронный.

3. Соловьев, В. И. Анализ данных в экономике: теория вероятностей, прикладная статистика, обработка и визуализация данных в Microsoft Excel: учебник для направления бакалавриата "Экономика и управление" / В. И. Соловьев; Финуниверситет. – Москва : Кнорус, 2019. - 498 с. - Текст : непосредственный. - То же. – 2023. - ЭБС BOOK.ru. - URL: <https://book.ru/book/946789> (дата обращения: 28.11.2023). — Текст : электронный.

Дополнительная литература:

1. Ширяев, А. Н. Задачи по теории вероятностей : учебное пособие / А. Н. Ширяев. – Москва : МЦНМО, 2006. – 416 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62138> (дата обращения: 11.12.2023). – ISBN 5-94057-107-7. – Текст : электронный.

2. Ширяев, А. Н. Вероятность-1: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы: в 2-х кн. / А. Н. Ширяев. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : МЦНМО, 2007. – 552 с. – ЭБС Университетская библиотека online. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63256&sr=1 (дата обращения: 28.11.2023). – Текст : электронный.

3. Ширяев, А. Н. Вероятность-2: Суммы и последовательности случайных величин – стационарные, мартингалы, марковские цепи: в 2-х кн. / А. Н. Ширяев. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : МЦНМО, 2007. – 416 с. - ЭБС Университетская библиотека online. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63257&sr=1 (дата обращения: 28.11.2023). – Текст : электронный.

4. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – Москва : Юрайт, 2011 - 479с. – Текст : непосредственный. – То же. - 2023.



— ЭБС Юрайт. - URL: <https://urait.ru/bcode/510437> (дата обращения: 28.11.2023). – Текст : электронный.

5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: учебное пособие / под ред. А. А. Свешникова. - Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 446 с. - Текст : непосредственный. - То же. – 2021. - ЭБС Лань. - URL: <https://e.lanbook.com/book/168507> (дата обращения: 28.11.2023). - Текст : электронный.

Нормативные правовые акты:

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. "Администрирование баз данных" на Stepik - <https://stepik.org/course/3200>
2. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/>
(<http://library.fa.ru/files/elibfa.pdf>)
3. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
4. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека ОНЛАЙН" <http://biblioclub.ru/>
5. "Деловая онлайн библиотека" издательства "Альпина Паблишер" <http://lib.alpinadigital.ru/en/library>
6. Электронно-библиотечная система издательства "Лань" <https://e.lanbook.com/>
7. Образовательная платформа "ЮРАЙТ" <https://urait.ru/>
8. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>
9. • Электронно-библиотечная система издательства Проспект <http://ebs.prospekt.org/books>
10. • Национальная электронная библиотека <http://нэб.рф/>



10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с содержанием рабочей программы дисциплины (далее – РПД), с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, имеющимися на образовательном портале и сайте департамента, с графиком консультаций преподавателей.

Рекомендации по подготовке к лекционным занятиям
(теоретический курс)

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания департамента.

Студентам рекомендуется:

- перед каждой лекцией просматривать рабочую программу дисциплины, что позволит сэкономить время на записывание темы лекции, ее основных вопросов, рекомендуемой литературы;

- на отдельные лекции приносить соответствующий материал на бумажных или электронных носителях, представленный лектором на портале. Данный материал будет охарактеризован, прокомментирован, дополнен непосредственно на лекции;

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущей лекции. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам, если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к лектору (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

Рекомендации по подготовке к практическим (семинарским) занятиям

Студентам следует:

- приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

- до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующей темы занятия;

- при подготовке к практическим занятиям следует обязательно использовать не только лекции, но и другую учебную литературу;

- в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, при решении задач, заданных для



самостоятельного решения;

- в ходе семинара давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;
- на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Методические рекомендации по выполнению различных форм самостоятельных домашних заданий

Самостоятельная работа студентов включает в себя выполнение различного рода заданий, которые ориентированы на более глубокое усвоение материала изучаемой дисциплины. К выполнению заданий для самостоятельной работы предъявляются следующие требования: задания должны выполняться самостоятельно и представляться в установленный срок, а также соответствовать установленным требованиям по оформлению.

Студентам следует:

- руководствоваться графиком самостоятельной работы, определенным РПД;
- выполнять все плановые задания, выдаваемые преподавателем для самостоятельного выполнения, и разбирать на семинарах и консультациях неясные вопросы;
- использовать при подготовке нормативные документы Финансового университета;
- при подготовке к экзамену параллельно прорабатывать соответствующие теоретические и практические разделы дисциплины, фиксируя неясные моменты для их обсуждения на плановой консультации.

Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к семинарскому занятию, выполнение расчетно-аналитической работы, начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома.

К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература.

При работе с литературой рекомендуется делать записи. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки явного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

Методические указания по проведению практических занятий

По структуре практические занятия следует разделить на учебные и контрольные.

Учебные практические занятия структурно состоят из следующих компонент:



- проверка наличия выполненного задания самостоятельной работы каждого студента;
- выборочная проверка корректности выполнения домашнего задания;
- разбор типичных ошибок, возникших в самостоятельной работе;
- рассмотрение теоретических вопросов, связанных с текущим практическим занятием;
- разбор методов выполнения практических заданий и решения задач;
- корректировка заданий для самостоятельной работы студентов.

Контрольные практические занятия структурно состоят из следующих компонент:

- проведение аудиторных самостоятельных работ;
- подведение итогов и разбор типичных ошибок, возникших при выполнении самостоятельных работ.
- Проведение коллоквиумов по теоретическому материалу

Студенты должны обратить внимание на перечень основных контрольных мероприятий, которые проводятся в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Конкретные сроки проведения этих мероприятий своевременно доводятся до сведения студентов.



11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

Комплект лицензионного программного обеспечения:

1. Kaspersky
2. Microsoft Office (Windows)

Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Информационно-правовая система «Гарант»
2. Информационно-правовая система «Консультант Плюс»
3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>
4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>

Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации

1. не предусмотрены

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

1. **Учебная аудитория** для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, в том числе групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная оборудованием и техническими средствами обучения: мебель аудиторная (столы, стулья, доска аудиторная), набор демонстрационного оборудования (проектор, экран)
2. Библиотека, читальный зал